ВИЗНАЧЕННЯ СТІЙКОСТІ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Стійкість - одна з основних динамічних властивостей працездатності системи автоматичного управління. Під стійкістю лінійних САУ розуміють її здатність повертатися в первинний рівноважний стан після зняття зовнішнього обурення, що викликало порушення рівноваги.

Нестійка система при скільки завгодно малих відхиленнях від сталої рівноваги не може повернутися в цей стан, а безперервно віддаляється від нього або здійснює неприпустимо великі коливання. Такі системи непрацездатні.

При аналітичному дослідженні динамічних систем управлінні необхідно складати диференціальні рівняння і вирішувати їх. Проте вирішення диференціальних рівнянь навіть для порівняно простих лінійних систем зв'язане із значними труднощами. Тому про стійкість САУ судять по певних ознаках, обходячись без безпосереднього вирішення диференціальних рівнянь. Ці ознаки служать для математичного визначення умови стійкості САУ і називаються критеріями.

Залежно від використовуваної для перевірки, інформації критерії діляться на дві групи: алгебра (Раусу, Гурвіця, Льена-Шипаро, Вишнеградського, Неймарка, Воронова та інші) і частотні (Михайлова, Найквіста, логарифмичний).

1. Розрахунок стійкості САУ по алгебраїчному критерію Рауса.

Застосування алгебраїчних критеріїв засноване на дослідженні комбінацій коефіцієнтів характеристичного рівняння, яким є знаменник передавальної функції замкнутої системи.

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0 \qquad (1)$$

$$A(p) = 2{,}15 p^3 + 1{,}15 p^2 + 4{,}89 p + 2{,}37 \qquad (2)$$

Характеристичне рівняння відповідає стійкій системі, якщо всі члени першого стовпця таблиці Рауса позитивні, якщо хоча б один член має від'ємний знак, то не стійка, а якщо хоча б один член має нульове значення, то на межі стійкості.

Таблиця Рауса має (n+1) строку і (n+1) стовпець і складається таким чином:

- у першому рядку таблиці Рауса розміщуються коефіцієнти з парними індексами, починаючи з a_0;
- у другому рядку - коефіцієнти з непарними індексами, починаючи з a_1;
- решта елементів таблиці Рауса визначається по співвідношеннях;
- відсутні елементи замінюються нулями.

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{3}$$

де $$a_{31}=a_2-a_3\cdot\frac{a_0}{a_1}=a_2-a_3r_1 \tag{4}$$

$a_{32}=a_4-a_5\cdot r_1; a_{33}=a_6-a_7\cdot r_1$

$a_{41}=a_3-a_{32}\cdot\frac{a_1}{a_{31}}=a_3-a_{32}\cdot r_2$

$a_{42}=a_5-a_{33}\cdot r_2$, інші аналогічно.

Якщо підставити числові значення – таблиця Рауса прийме вигляд:

$$R=\begin{vmatrix} 2,15 & 4,89 & 0 \\ 1,15 & 2,37 & 0 \\ 0,459 & 0 & 0 \\ 2,36 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Висновок:

***Згідно критерію Рауса САУ, що описується характеристичним рівнянням (2), є стійкою оскільки коефіцієнти першого стовпця позитивні*.**

2. Розрахунок стійкості САУ по критерію Гурвиця

Згідно критерію Гурвиця характеристичне рівняння замкнутої системи ( ) є стійкою, якщо всі діагональні визначники матриці Гурвиця позитивні.

Матриця Гурвиця (5), що має n строк і n стовпців складається таким чином. Всі коефіцієнти від $\boldsymbol{a_1}$ до $\boldsymbol{a_n}$ розташовуються по головній діагоналі в порядку зростання індексів. Над діагоналлю записуються коефіцієнти із зростаючими індексами, під головною - коефіцієнти із спадними індексами. На місці коефіцієнтів, індекси яких більше ***n*** і менше нуля, проставляються нулі:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & & & a_n \end{vmatrix} \tag{5}$$

Розглянемо систему автоматичного управління з характеристичним рівнянням:

$$2\cdot 10^{-6}p^4+2\cdot 10^{-2}p^3+3p^2+130p+10^5=0 \tag{6}$$

Для нашого випадку, характеристичне рівняння четвертого порядку (n=4), тому матриця Гурвиця складається таким чином:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} \tag{7}$$

Підставив числові значення отримуємо:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 2\cdot 10^{-2} & 130 & 0 & 0 \\ 2\cdot 10^{-6} & 3 & 10^5 & 0 \\ 0 & 2\cdot 10^{-2} & 130 & 0 \\ 0 & 2\cdot 10^{-6} & 3 & 10^5 \end{vmatrix} \tag{8}$$

Визначимо всі визначники і отримуємо:

$$\Delta_1=a_2=2\cdot 10^{-2}\succ 0$$

$$\Delta_2=a_1\cdot a_2-a_0\cdot a_3=2\cdot 10^{-2}\cdot 3-2\cdot 10^{-6}\cdot 130\approx 0{,}06>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=a_3\cdot\Delta_2-a_1^2\cdot a_4=130\cdot 0{,}06-(2\cdot 10^{-2})^2\cdot 10^5=-32{,}2<0$$

Третій визначник менш ніж нуль, тому за критерієм Гурвиця можна зробити висновок, що система автоматичного управління не стійка.

Значення визначників різного ступеня:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_4-a_2a_3>0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=a_3(a_1a_4-a_2a_3)-a_4a_1^2>0$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}=(a_1a_4-a_2a_3)(a_3a_4-a_2a_5)-(a_1a_4-a_0a_5)^2>0$$

$$\Delta_5=(a_1a_4-a_0a_3)[a_5(a_3a_4-a_2a_5)-a_6(a_1a_5-a_3^2)]+(a_1a_4-a_0a_5)\times$$
$$\times[a_1a_3a_6-a_5(a_1a_4-a_0a_5)]-a_1^2a_6^2>0$$

3. Розрахунок стійкості САУ по критерію Льєнара-Шипара

У практичних розрахунках стійкість САУ визначають по приватних критеріях стійкості Гурвиця, який називають критерієм Льенара - Шипара і він формулюється так:

характеристичне рівняння відповідає стійкій системі, якщо при парному n позитивні всі діагональні визначники матриці непарного порядку, а

при непарному n - позитивні всі діагональні визначники парного порядку, тобто

*при **n=2к*** $\Delta_1 > 0$, $\Delta_3 > 0, \ldots, \Delta_{2к-1} > 0$

*при **n=2к +1*** $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0, \ldots, \Delta_{2к} > 0$

Таким чином:

- для рівняння третього порядку $a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0$ умова стійкості:

$$\Delta_2 > 0$$

- для рівняння четвертого порядку $a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = 0$ умова стійкості:

$$\Delta_3 > 0$$

- для рівняння п'ятого порядку $a_0p^5 + a_1p^4 + a_2p^3 + a_3p^2 + a_4p + a_5 = 0$ умова стійкості:

$$\Delta_2 > 0; \qquad \Delta_4 > 0$$

- для рівняння шостого порядку $a_0p^6 + a_1p^5 + a_2p^4 + a_3p^3 + a_4p^2 + a_5p + a_6 = 0$ умова стійкості:

$$\Delta_3 > 0; \qquad \Delta_5 > 0$$

4. Розрахунок стійкості САУ по критерію Неймарка

В характеристичному рівнянні проведемо заміну $p \Rightarrow j\omega$, де $j = \sqrt{-1}$, і відокремимо дійсну і уявну частини:

$$W(j\omega) = R(j\omega) + J(j\omega)$$

Очевидно, що поліном $R(j\omega)$ може містити члени тільки з парним ступенем ω, а поліном $J(j\omega)$ - члени тільки з непарними ступенями ω.

Позначимо коефіцієнти $R(j\omega)$ через c, а коефіцієнти $J(j\omega)$ через d, тобто запишемо поліноми так чином:

$$\begin{cases} R(\omega) = c_0\omega^n + c_1\omega^{n-1} + \ldots + c_n \\ J(\omega) = d_0\omega^n + d_1\omega^{n-1} + \ldots + d_n \end{cases}$$

При цьому, якщо n - парне число, то всі ***c*** з непарними і ***d*** з парними індексами (враховуючі і d_0) рівні нулю.

Далі складемо таблицю, у верхній рядок якої випишемо все c, а в нижній рядок всі d так, щоб в один стовпець потрапили коефіцієнти з однаковими індексами:

$$c_0 c_1 \ldots c_n$$

$$d_0 d_1 \ldots d_n$$

Введемо тепер відношення першої цифри верхнього рядка до першої, відмінної від нуля цифри нижнього рядка.

$$\lambda = \frac{c_0}{d_1}$$

і складемо нову таблицю, у верхній рядок якої входитимуть такі елементи:

$$c_i - \lambda d_{i+1}$$

тобто елементи, що отримуються відніманням з попереднього елементу добутку λ на елемент нижнього рядку, що стоїть в наступному стовпці, а нижній рядок залишається без зміни.

Далі розглянемо на прикладі характеристичного рівняння, що має вигляд:

$$9p^4 + 8p^3 + 7{,}1p^2 + 2p + 0{,}5 = 0$$

то після підстановки в нього $p \to j\omega$ отримуємо:

$$9(j\omega)^4 - 8(j\omega)^3 - 7{,}1(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 0{,}5 = 0$$

або

$$(9\omega^4 - 7{,}1\omega^2 + 0{,}5) + j(-8\omega^3 + 2\omega) = 0$$

Отже,

$$R(\omega) = 9\omega^4 - 7{,}1\omega^2 + 0{,}5$$

$$J(\omega) = -8\omega^3 + 2\omega$$

Тому таблиця для рівняння буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 9 \quad 0 \quad -7{,}1 \quad 0 \quad 0{,}5 \\ 0 \quad -8 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

Відношення же першої цифри верхньої строки до першої цифри нижньої строки, що відрізняється від нуля, буде

$$\lambda_1 = \frac{9}{-8}$$

Отже, нова таблиця буде мати вигляд:

$$\begin{cases} \left[9 - \left(-\frac{9}{8}\right) \cdot (-8)\right] \quad 0 \quad \left[-7{,}1 - \left(-\frac{9}{8}\right) \cdot (2)\right] \quad 0 \quad 0{,}5 \\ 0 \quad -8 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \end{cases}$$

або після перетворень:

$$\begin{cases} 0 \quad -4{,}85 \quad 0 \quad 0{,}5 \\ -8 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \end{cases}$$

Введемо тепер відношення першої цифри таблиці після нуля другої строки до першої цифрі першої строки, що відрізняється від нуля .

$$\mu_1 = \frac{-8}{-4{,}85} = \frac{8}{4{,}85}$$

і складемо нову таблицю, в котрій елементи першої строки залишаться без зміни, а елементи другої строки замінюються на елементи, що являють собою різницю між старим елементом і здобутком μ на елемент верхньої строки, що стоять в слідуючому стовбці. В результаті отримуємо таку таблицю:

$$\begin{cases} 0 \quad -4{,}85 \quad 0 \quad 0{,}5 \\ \left[-8 - \left(\frac{8}{4{,}85}\right) \cdot (-4{,}85)\right] \quad 0 \quad \left[2 - \left(\frac{8}{4{,}85}\right) \cdot (0{,}5)\right] \quad 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 0 \quad -4{,}85 \quad 0 \quad 0{,}5 \\ 0 \quad 0 \quad 1{,}17 \quad 0 \end{cases}$$

Визначимо λ_2 як відношення першої цифри верхньої строки до першої, до першої цифри нижньої строки, що відрізняється від нуля:

$$\lambda_2 = -\frac{4{,}85}{1{,}17}$$

$$\begin{cases} -4{,}85 - \left(-\dfrac{4{,}85}{1{,}17}\right) \cdot 1{,}17 \quad 0 \quad 0{,}5 \\ 0 \qquad\qquad\qquad 1{,}17 \quad 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 0 \qquad\quad 0{,}5 \\ 0 \quad 1{,}17 \quad 0 \end{cases}$$

Отримуємо μ_2

$$\mu_2 = \frac{1{,}17}{0{,}5}$$

Процеси побудови таких таблиць носять назву λ - перехід та μ - перехід.

Такі переходи здійснюються до тих пір, поки не отримуємо таблицю, що складається тільки з одного стовпця.

Система за критерієм Неймарку є стійкою, якщо всі коефіцієнти λ негативні, а усі коефіцієнти μ позитивні.

5. Оцінювання стійкості і якості лінійних систем за критеріями В.С. Воронова

При дослідженні й проектуванні систем автоматичного керування буває важливо знати, як впливають параметри системи на її стійкість і якість. Математичну модель лінійної системи можна представити у вигляді передатної функції:

$$W = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n}, \tag{1}$$

причому найбільш важлива інформація міститься в коефіцієнтах характеристичного полінома

$$A = a_0 + a_1 a \ldots + a_n p^n \tag{2}$$

По цім коефіцієнтам, використовуючи критерії Рауса й Гурвіца, можна судити про стійкість системи, а розташування коренів характеристичного рівняння (полюсів системи) дозволяє судити про якість перехідних процесів.

Класичні частотні й кореневі методи не завжди зручні при проектуванні систем, оскільки в цьому випадку зв'язок між коефіцієнтами математичної моделі й застосовуваними критеріями (показниками) стійкості і якості є досить складною. Тому виникає питання: чи існують такі критерії, у яких зв'язок між коефіцієнтами полінома (2) і показниками стійкості і якості була б простою. Позитивна відповідь на це питання була дана у роботах В.С. Воронова, який в 60-х роках минулого століття вперше одержав прості необхідні й прості достатні умови стійкості. У своїх роботах він також запропонував показники стійкості і якості систем керування, що мають простий зв'язок з коефіцієнтами характеристичного полінома. Аж до кінця 70-х років В.С. Воронов публікував усі свої роботи у важкодоступних і малотиражних виданнях, тому іноді отримані їм результати приписують іншим авторам.

Будемо враховувати, що всі коефіцієнти полінома мають однакові знаки (будемо вважати їх позитивними), що є найпростішою необхідною умовою стійкості, сформульованою Стодолою.

Стійкість і якість системи керування з характеристичним поліномом (2) можна оцінити за допомогою наступних показників:

Наближені частоти, що сполучають

$$\omega_k = \frac{a_{k-1}}{a_k}, \text{ k} = 1, 2,\dots, \text{n} \tag{3}$$

Показники (міри) якості

$$\Omega_k = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \frac{a_k^2}{a_{k-1}a_{k+1}}, \text{ k} = 1, 2,\dots, \text{n-1} \tag{4}$$

Показники (міри) стійкості

$$W_k = \frac{\omega_{k+2}}{\omega_k} = \Omega_k \Omega_{k+1} = \frac{a_k a_{k+1}}{a_{k-1}a_{k+2}} \text{k} = 1, 2,\dots, \text{n-2} \tag{5}$$

Значення (3) приблизно дорівнюють сполученим частотам на ділянках, де визначаючими є дійсні корні, відповідні до аперіодичних ланок. Якщо $\Omega <$ 1,7...2, то значення $\omega_{k,k+1} = \sqrt{\omega_k \omega_{k+1}}$ наближає, сполучену частоту на ділянці, де визначеною є пара комплексно-сполучених коренів, відповідних до коливальної ланки.

Використовуючи метод математичної індукції, В.С. Воронов в 1965 році довів, що виконання нерівностей

$$\frac{a_0}{a_2} < \frac{a_1}{a_3} < \cdots < \frac{a_{k-1}}{a_{k+1}} < \cdots < \frac{a_{n-2}}{a_n} \tag{6}$$

є необхідною умовою стійкості. З використанням показників стійкості умова (6) запишеться у вигляді:

$$W_k > 1, \text{ k} = 1, 2,\dots, \text{n-2} \tag{7}$$

Невиконання хоча б одного з нерівностей (7) є достатньою умовою нестійкості.

Виконання необхідної умови стійкості (7) ще не означає, що система буде стійкою. Тому В.С. Воронов запропонував також ряд достатніх умов стійкості. Найпростіше з них має вигляд

$$W_k > 2{,}148, \text{ k} = 1, 2,\dots, \text{n-2} \tag{8}$$

З виразу (5) випливає, що умова (8) буде завжди виконуватися, якщо показники якості задовольняють обмеженням:

$$\Omega_k > \sqrt{2{,}148} = 1{,}466, \text{ k} = 1, 2,\dots, \text{n-1} \tag{9}$$

Таким чином, (9) є достатньою умовою стійкості, що сформована по показникам якості.

На практиці звичайно вимагають, щоб система мала деякий запас стійкості і якості, тому поряд з умовами (8), (9) в була запропонована умова стійкості із запасом

$$W_k > 3,\ k = 1, 2, \ldots, n-2 \quad (10)$$

і умова стійкості і якості (якісної стійкості)

$$\Omega_k > \sqrt{3} = 1{,}732,\ k = 1, 2, \ldots, n-1 \quad (11)$$

В.С. Воронов показав також, що якщо всі $\Omega k \geq 4$, то всі коріння полінома будуть речовинним.

У спеціальній літературі наведені також і інші, трохи більш складні достатні умови стійкості, що практично наближаються до необхідної й достатньої умови. Однак найбільш практичними є найпростіші умови (8) - (11), тому обмежимося їхнім розглядом.

6. Розрахунок стійкості САУ по критерію Михайлова

Критерій Михайлова засновано на використанні характеристичного рівняння замкнутої системи. При цьому в характеристичному рівняння (12) підставляють замість p вираз jω і отримуємо в загальному вигляді:

$$G = a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} j\omega + a_n = 0 \quad (1)$$

а в числовому вигляді:

$$G = 6(j\omega)^4 + 14(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 11j\omega + 8 = 0$$

Потім, виділяємо дійсну і уявну частини, характеристичне рівняння представимо у вигляді комплексного полінома

$$G(j\omega) = R(\omega) + jJ(\omega)$$

Згідно критерію Михайлова, для стійкої замкненої системи n-го порядку необхідно і достатньо, щоб годограф Михайлова, що описується кінцем вектору G(jw), при зміні частоти ω від 0 до ∞, починаючі при ω = 0 на дійсної позитивної на півосі , описував тільки проти годинникової стрілки послідовне число квадрантів координатної плоскості, рівному порядку n характеристичного рівняння (в нашому випадку 4).

Для розрахунків приймемо, що $j^2 = -1;\ j^3 = -j;\ j^4 = 1$ і проведемо розділення характеристичного рівняння передавальної функції розімкненої системи на дійсну R(ω) і мниму J(ω) частини:

$$R(\omega) = 6\omega^4 - 5\omega^2 + 8 \quad (2)$$

$$J(\omega) = -14\omega^3 + 11\omega \quad (3)$$

Після чого, задаючись різними значеннями ω от 0 до ∞, знаходимо величини R(ω) и J(ω) і побудуємо графік *R(ω) =f J(ω)* в плоскості комплексних змінних. Результати розрахунків зведемо до таблиці 1.

Таблиця 1 - Розрахунок стійкості по критерію Михайлова

ω	0	0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	4
R(ω)	8	7,71	7,13	7,09	9	14,84	27,13	48,96	1464
J(ω)	0	2,53	3,75	2,34	-3	-13,59	-30,75	-55,78	-852

По отриманим даним будуємо годограф Михайлова, який представлений на рисунку 1.

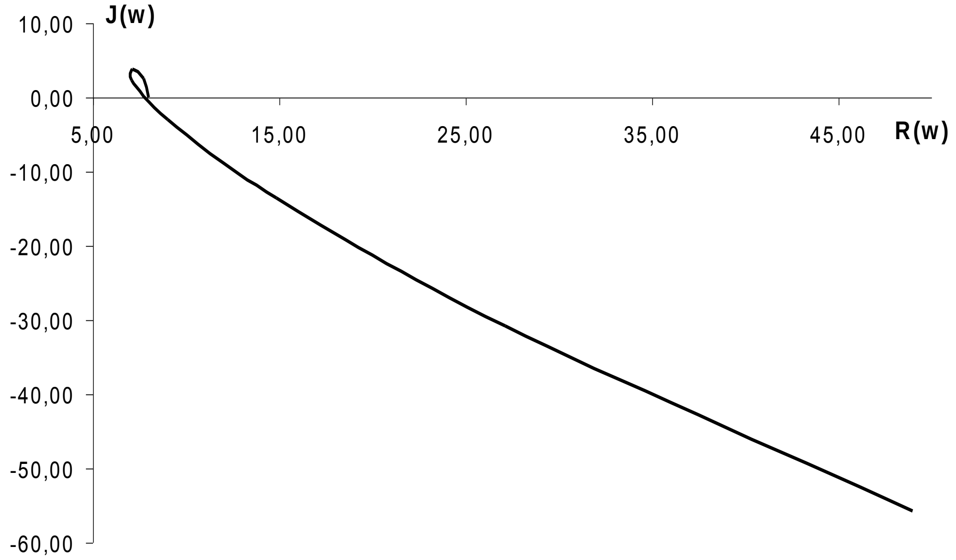

Рис. 1 – Годограф Михайлова

Висновок:

Замкнута система САУ є не стійкою, тому що не виконується вимоги критерію Михайлова.

7. Визначення стійкості за критерієм Найквіста.

Критерій стійкості Найквіста позволяє судити про стійкість замкнутої системи автоматичного керування по амплітудо - фазо - частотної характеристиці розімкнутої системи.

Для цього в рівнянні передатної функції розімкнутої системи $W_{РОЗ}(p)$ підставляємо p = jω і отримуємо вираз:

$$W_{РОЗ}(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \ldots + b_{m-1} jw + b_m}{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} jw + a_n}. \qquad (1)$$

Потім, шляхом відомих перетворень поділяємо чисельник і знаменник на дійсну мниму частини, обчислюючи відповідні коефіцієнти:

a, в – дійсна і уявна частини чисельника;

c, d – дійсна і уявна частини знаменника.

Для визначення дійсної R(ω) і мнимої I(ω) частин рівняння (1) використовуємо вирази (2 і 3)

$$R(\omega) = \frac{a(\omega)\cdot c(\omega) + b(\omega)\cdot d(\omega)}{c^2(\omega) + d^2(\omega)} \tag{2}$$

$$J(\omega) = \frac{b(\omega)\cdot c(\omega) - a(\omega)\cdot d(\omega)}{c^2(\omega) + d^2(\omega)} \tag{3}$$

Після цього, задаючись різноманітними значеннями частоти ω, знаходимо величини R(ω) и J(ω) і будуємо в площині комплексних змінних годограф Найквіста (АФЧХ) (рисунок 2).

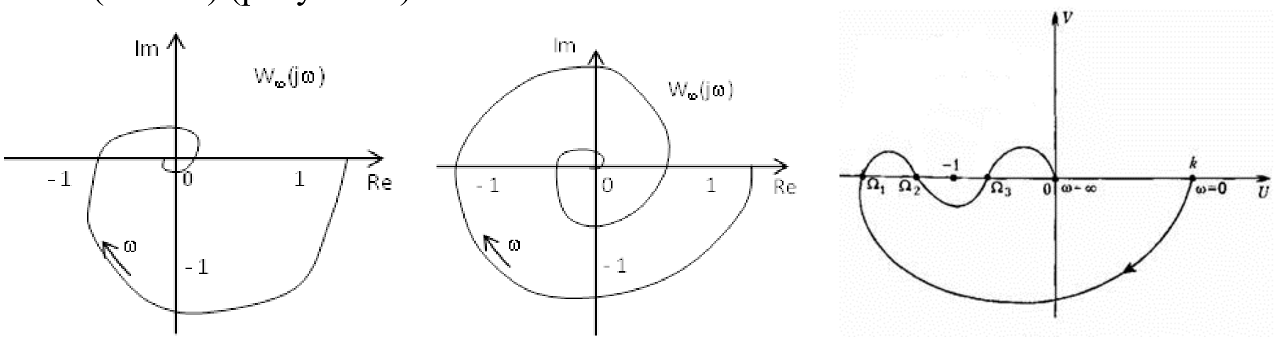

Рисунок 1 - Приклади годографу Найквіста

При аналізі замкнутої системи по її поведінки в розімкнутому стану може виникнути два випадки: розімкнута система стійка або нестійка.

Критерій Найквіста у спрощеному варіанті формулюється так - замкнута автоматична система керування буде стійкою, якщо амплітудо – фазо - частотна характеристика розімкнутої системи при зміні частоти ω від 0 до ∞ не охоплює контрольну точку (-1; j0).

Для випадку, коли АФЧХ охоплює дану точку або проходить через нею, то система автоматичного керування відповідно – нестійка або вона нейтральна.

8. Розрахунок стійкості САУ логарифмічним методом

Про стійкість замкнутої системи автоматичного управління, судять по логарифмічних амплітудних (ЛАЧХ) і фазових (ЛФЧХ) частотним характеристикам розімкненої системи.

Для розрахунку візьмемо передавальну функцію розімкненої системи і проведемо її аналіз.

$$W_p(p) = \frac{41{,}7p + 0{,}988}{2{,}15p^4 + p^3 + 1{,}31p + 2{,}37}$$

Для цього в рівняння передавальної функції розімкненої системи $W_P(p)$ проводимо заміну p на jω, враховуючі що $j^2 = -1; j^3 = -j; j^4 = 1$ - при цьому отримуємо вираз

$$W_p(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + ... + b_{m-1}j\omega + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + ... + a_{n-1}j\omega + a_n} \quad (1)$$

$$W_p(j\omega) = \frac{41{,}7\,j\omega + 0{,}988}{2{,}15\omega^4 - j\omega^3 + 1{,}31\,j\omega + 2{,}37}$$

Потім, використовуючи допоміжні коефіцієнти розділяємо передавальну функцію на дійсну R(ω) и мниму J(ω) частини.

$$R(\omega) = \frac{a(\omega)\cdot c(\omega) + b(\omega)\cdot d(\omega)}{c^2(\omega) + d^2(\omega)} \quad (2)$$

$$J(\omega) = \frac{b(\omega)\cdot c(\omega) - a(\omega)\cdot d(\omega)}{c^2(\omega) + d^2(\omega)} \quad (3)$$

Після чого, задаючись значеннями ω, знаходимо величини L(ω) і φ(ω) та побудуємо графіки ***20 lgL(ω) = f(ω)*** *і* ***φ(ω) =f(ω)*** в плоскості комплексних змінних, по котрим визначимо характерні крапки.

$$L(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + J^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{J(\omega)}{R(\omega)} + m\pi$$, де m = 0; ±1; ±2; ±3;…

Результати розрахунків зведемо до таблиці 2.

Таблиця 1 - Розрахунок стійкості логарифмічним методом

ω	R(ω)	J(ω)	20Lg[L(ω)]	j(ω)
0	0,42	0,00	-15,20	0,00
1	0,85	9,17	38,56	84,72
2	-0,30	2,22	14,04	-82,35
3	-0,09	0,70	-6,13	-83,01
4	-0,03	0,30	-20,91	-84,27
5	-0,01	0,15	-32,47	-85,24
6	-0,01	0,09	-41,93	-85,96
8	0,00	0,04	-56,90	-86,91
10	0,00	0,02	-68,51	-87,51
12	0,00	0,01	-78,01	-87,91
13	0,00	0,01	-82,18	-88,07
14	0,00	0,01	-86,04	-88,21
16	0,00	0,00	-92,99	-88,43
18	0,00	0,00	-99,13	-88,60
20	0,00	0,00	-104,62	-88,74

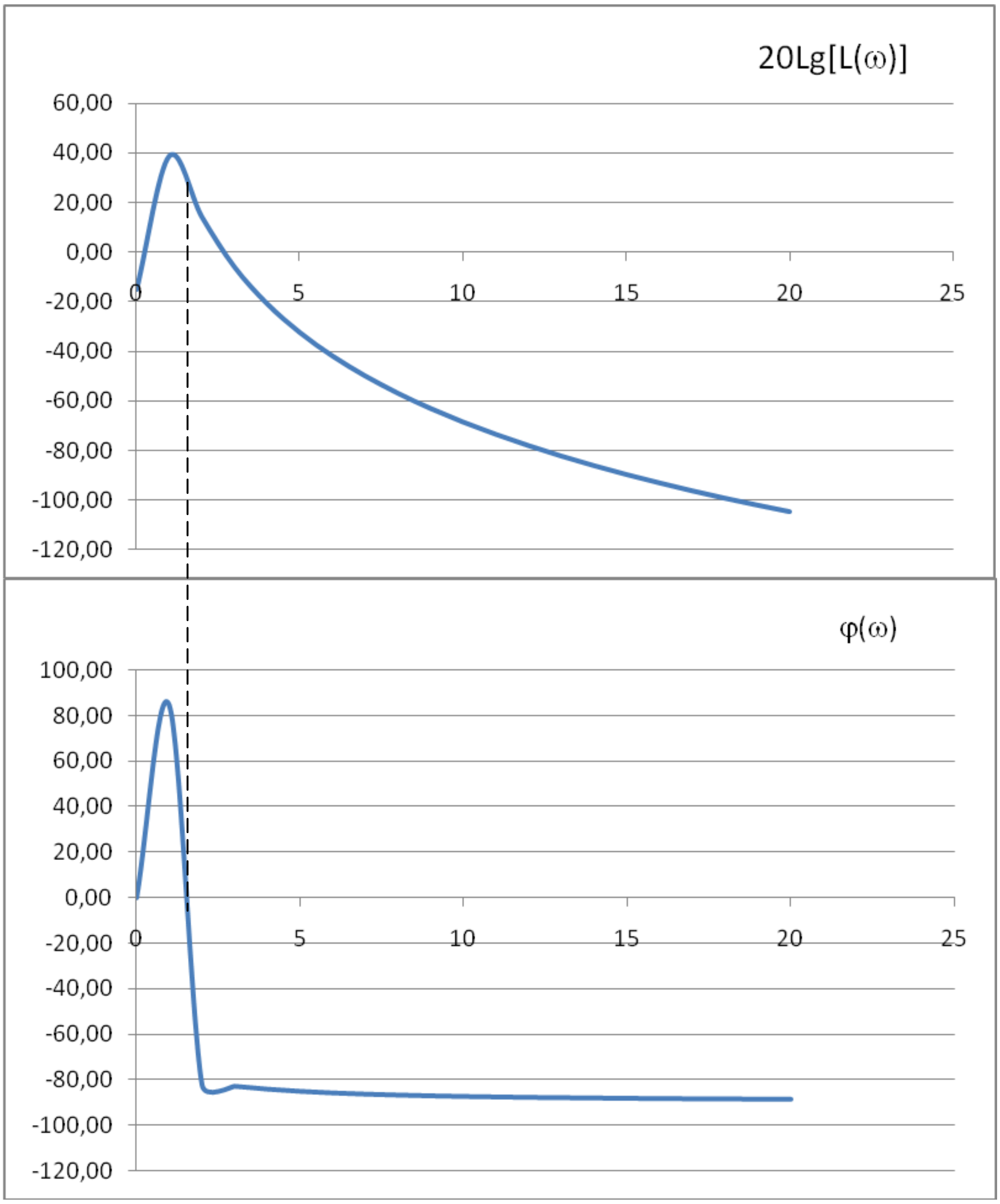

Рисунок 1 - Логарифмічний критерій стійкості

Висновок:

Система автоматичного управління в розімкненому стані, буде не стійкою і в замкнутому стані, оскільки точка А ЛФЧХ відповідає області позитивних значень ЛАЧХ.